

2020年天津河东区高三一模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知集合 $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, 则 $A \cap B = ()$.

- A. $\emptyset$ B. $\{2\}$ C. $\{0\}$ D. $\{-2\}$

2. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 " $a > b$ " 是 " $a^2 > b^2$ " 的 $()$.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率等于 $()$.

- A. $2e$ B. e C. 2 D. 1

4. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 $()$.

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

5. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$.

- A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$ B. 6 C. 12 D. $7\sqrt{3}$

6. 某市生产总值连续两年持续增加, 第一年的增长率为 p , 第二年的增长率为 q , 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 $()$.

- A. $\frac{p+q}{2}$ B. $\frac{(p+1)(q+1)}{2}$
C. pq D. $\sqrt{(p+1)(q+1)} - 1$

7. 有6名男医生、5名女医生, 从中选出2名男医生、1名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 _____ 种 (用数字作答).

8. 若 $\log_4(3a+4b) = \log_2 \sqrt{ab}$, 则 $a+b$ 的最小值是 $()$.

- A. $6+2\sqrt{3}$ B. $7+2\sqrt{3}$ C. $6+4\sqrt{3}$ D. $7+4\sqrt{3}$

9. 已知函数 $f(x) = |x-2| + 1$, $g(x) = kx$. 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 $()$.

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. i 是虚数单位, 复数 $\frac{1+3i}{1-i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

12. 正四棱锥的顶点都在同一球面上. 若该棱锥的高为4, 底面边长为2, 则该球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 φ 个单位, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 2$, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$, 则实数 λ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C , 所对边分别为 a, b, c , 已知 $a-c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$, $\sin B = \sqrt{6}\sin C$.

(1) 求 $\cos A$ 的值.

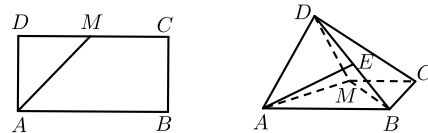
(2) 求 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 某企业有甲、乙两研发小组，他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$. 现安排甲组研发新产品A，乙组研发新产品B，设甲、乙两组的研发相互独立.

(1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;

(2) 若新产品A研发成功，预计企业可获利润120万元；若新产品B研发成功，预计企业可获利润100万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

18. 如图，已知长方形ABCD中， $AB = 2\sqrt{2}$ ， $AD = \sqrt{2}$ ，M为DC的中点. 将 $\triangle ADM$ 沿AM折起，使得平面ADM $\perp$ 平面ABCM.



(1) 求证: $AD \perp BM$.

(2) 若点E是线段DB上的一动点，问点E在何位置时，二面角E-AM-D的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数). 令 $c_n = b_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

20. 已知函数 $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$, $g(x) = 3(x - \pi)\cos x - 4(1 + \sin x)\ln\left(3 - \frac{2x}{\pi}\right)$.

证明:

(1) 存在唯一 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(x_0) = 0$.

(2) 存在唯一 $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 使 $g(x_1) = 0$, 且对 (1) 中的 x_0 , 有 $x_0 + x_1 < \pi$.